

KOD:

--	--	--

PESEL:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

DATA: PAŹDZIERNIK 2025

CZAS TRWANIA: 180 MINUT

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: 50

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym:

1. Zaznacz emotkę, która opisuje Twój dzień: 😊 😎 😞 🤔 😡
2. Wybierz swoją super moc: dysleksja, lenistwo, niewyspanie xDD
3. Jeśli masz znajomych, to możesz im podesłać też ten arkusz - będzie nam niezmiernie miło hehe

Arkusz opracowali: **Kacper Burczaniuk, Paweł Wolski**

korepetycje z matematyki - www.mat-hero.pl | www.matematiko.pl

Zadanie 1. (0-2)

Spadek prędkości ciała spowodowany oporami powietrza można opisać wzorem

$$v(t) = v_0 \cdot \alpha^{-t}$$

gdzie:

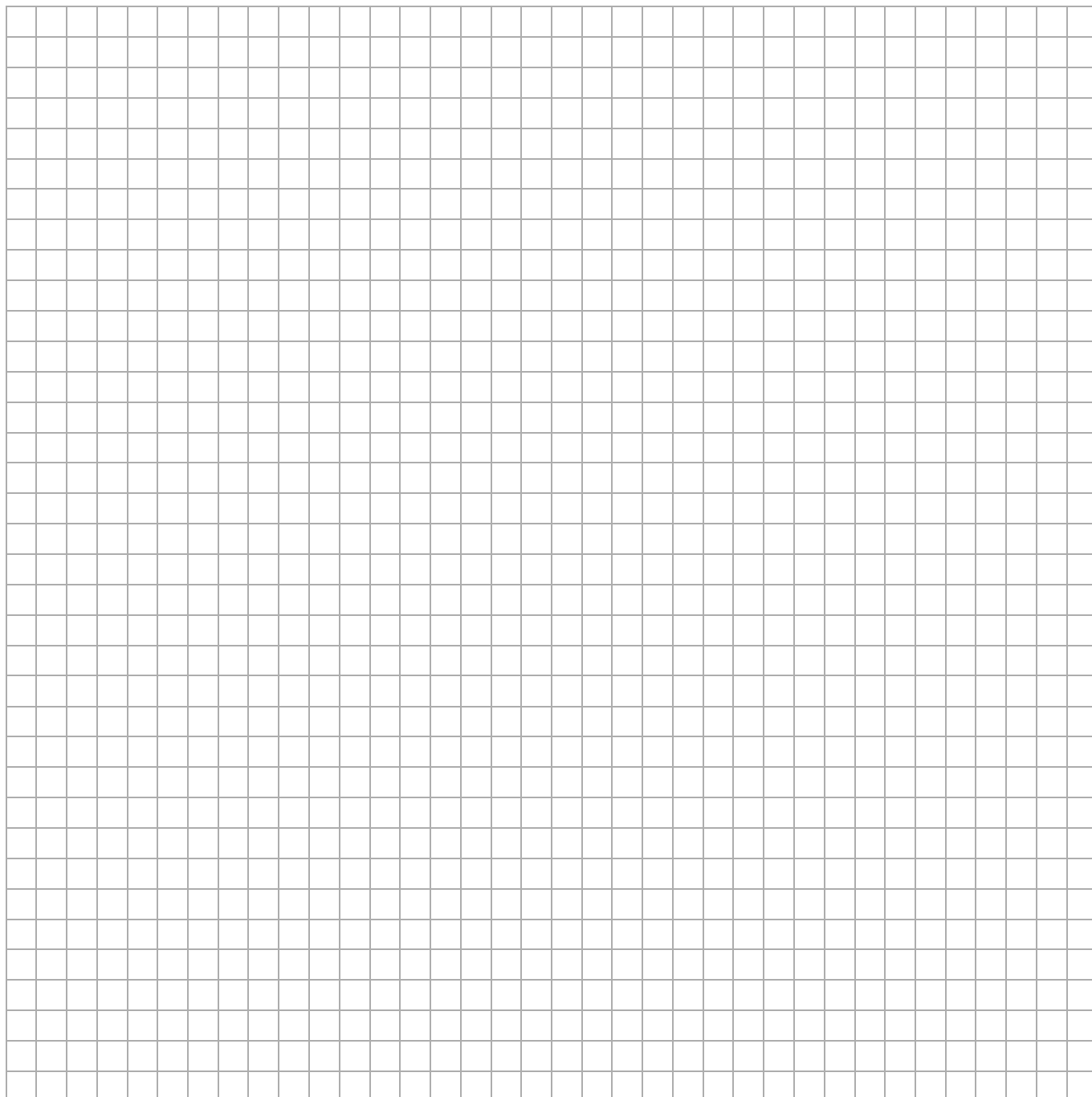
$v(t)$ – prędkość po czasie t sekund wyrażona w $\frac{m}{s}$

v_0 – prędkość początkowa wyrażona w $\frac{m}{s}$

α – stała dodatnia

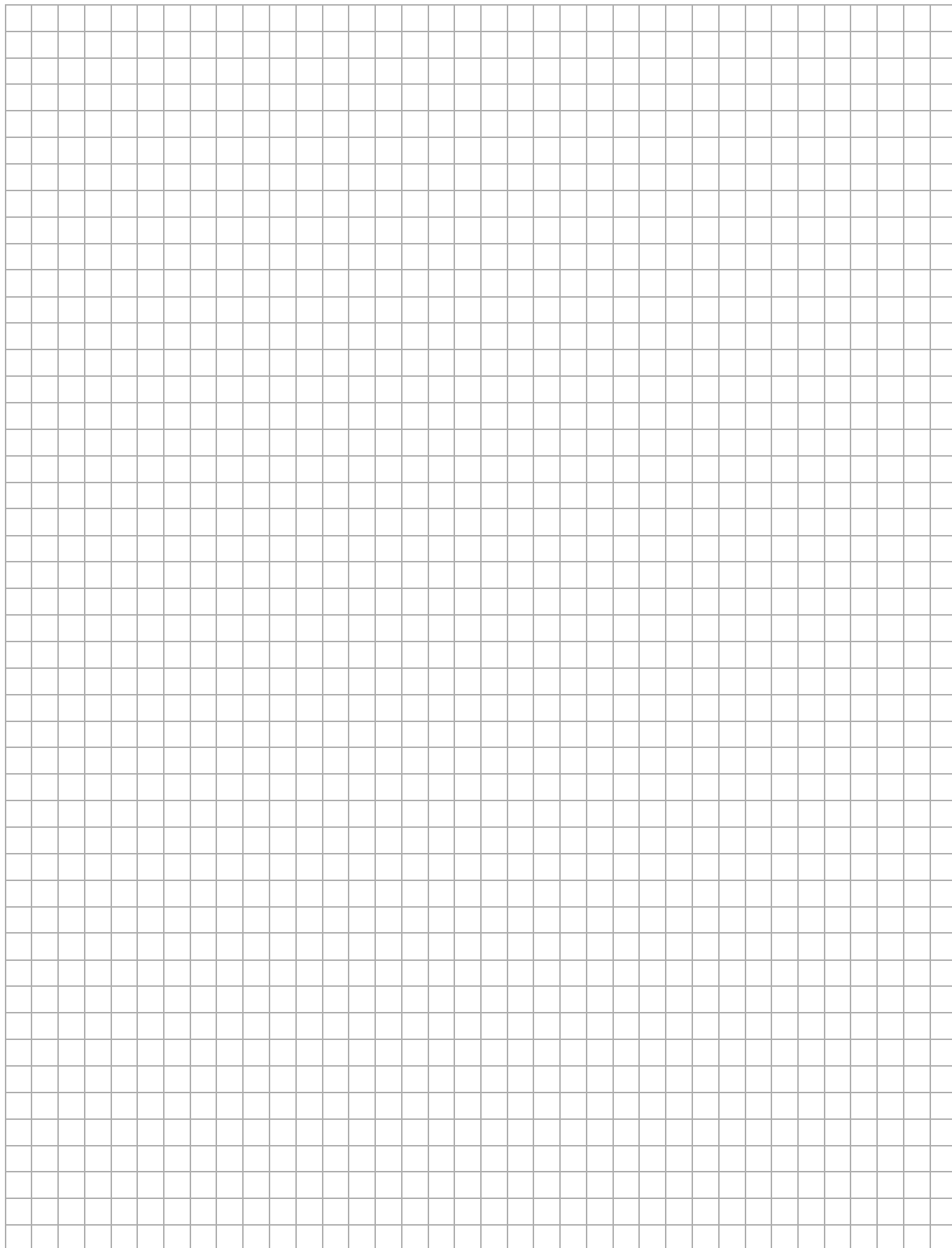
Auto porusza się (w chwili $t = 0$) z prędkością $30 \frac{m}{s}$. Po 6 sekundach od chwili rozpoczęcia, jego prędkość spadła do $19,2 \frac{m}{s}$.

Oblicz prędkość auta po kolejnych 3 sekundach.



Zadanie 2. (0-3)

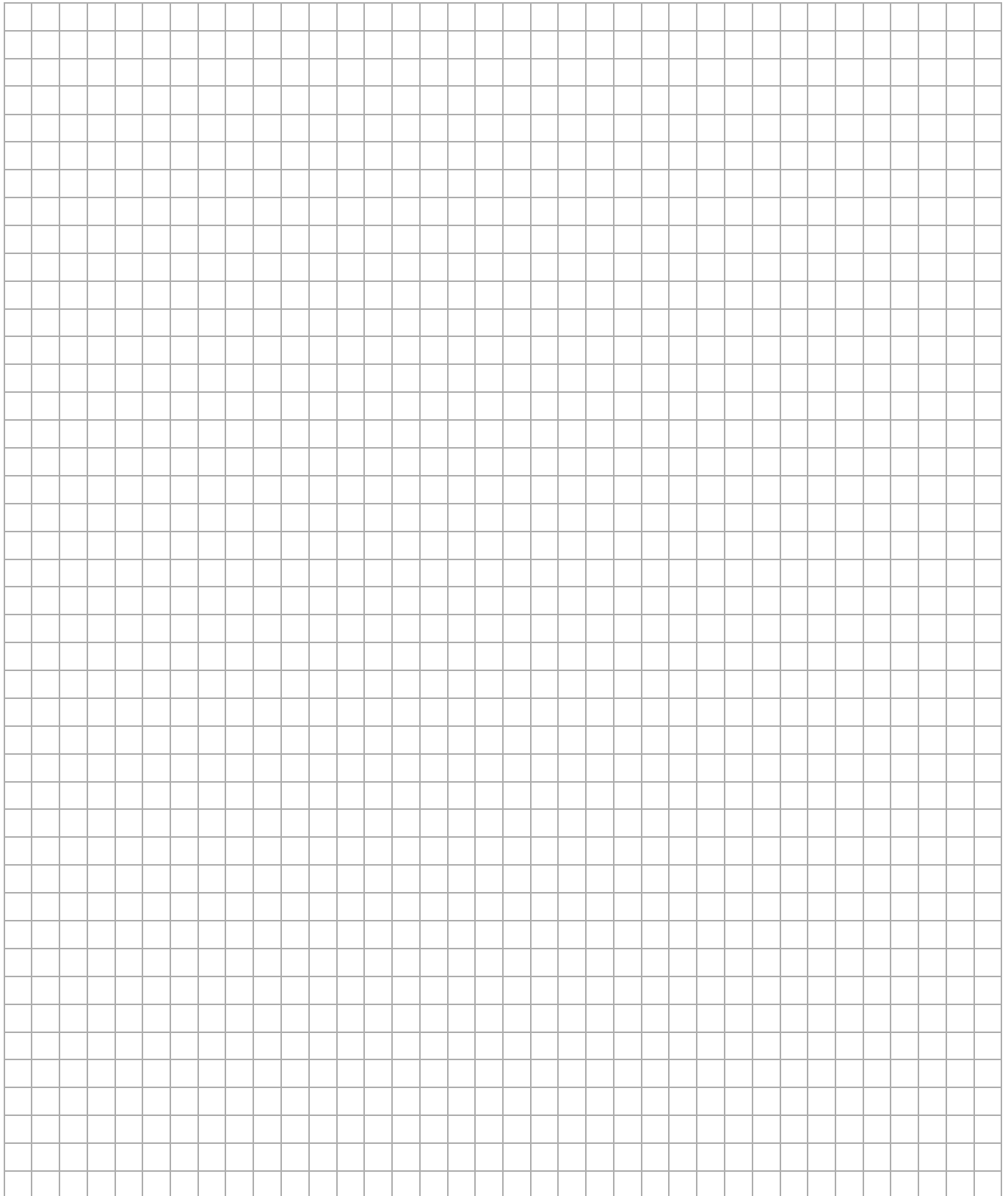
Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2} + \log_2(x)$ przyjmuje w przedziale $(2; +\infty)$ wartość 12.



Zadanie 3. (0-2)

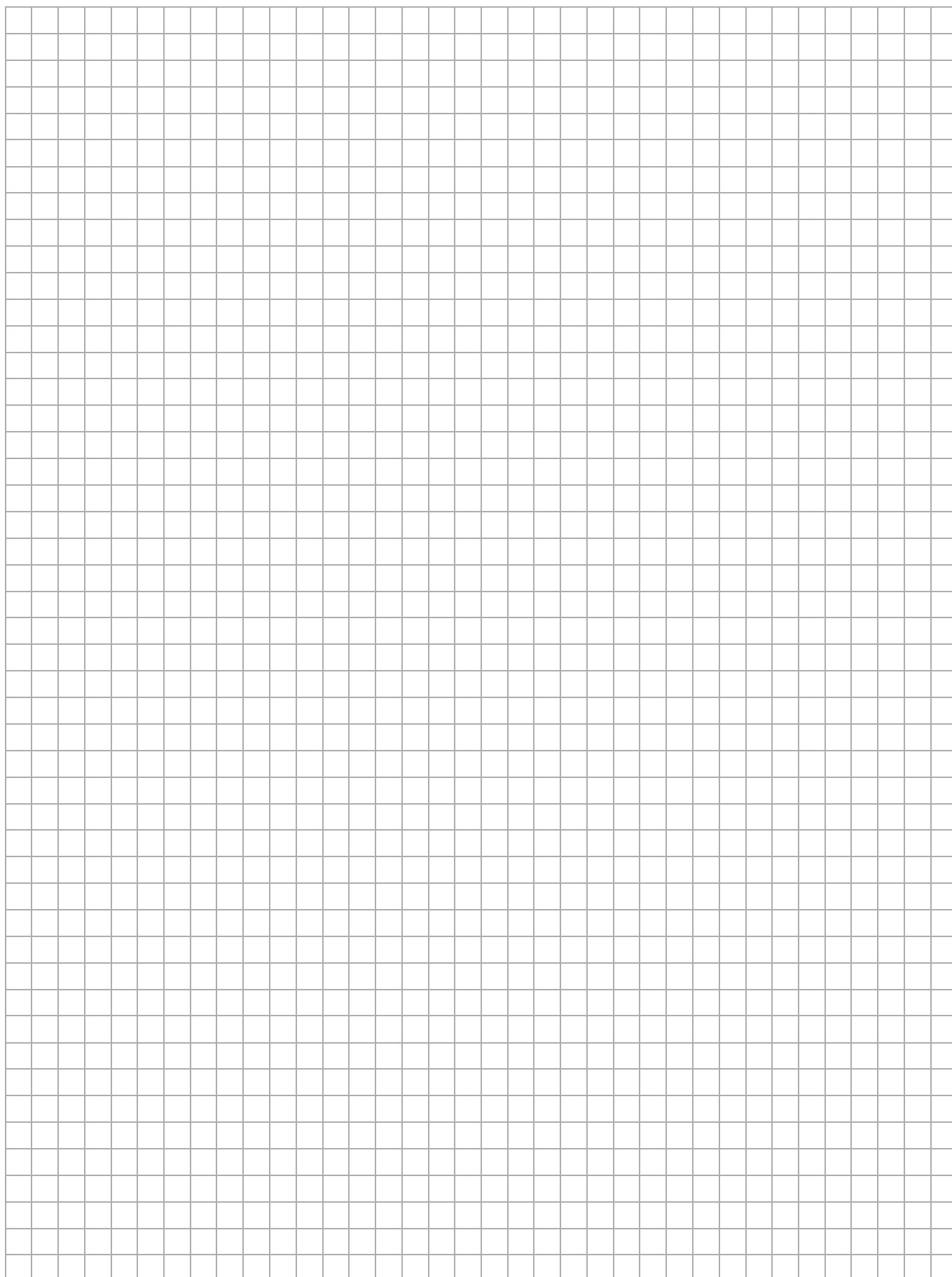
Bartek ma założoną skrzynkę mailową na którą $\frac{1}{4}$ maili przychodzi niechciana. Skrzynka mailowa odsiewa niechciane maile do spamu ze skutecznością 98% . Prawdopodobieństwo tego, że chciany mail trafi do spamu wynosi 3%.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że mail był niechciany jeśli wiadomo, że trafił do spamu. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.



Zadanie 4. (0-3)

Wyznacz równanie stycznej do funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ w punkcie o rzędnej 2.

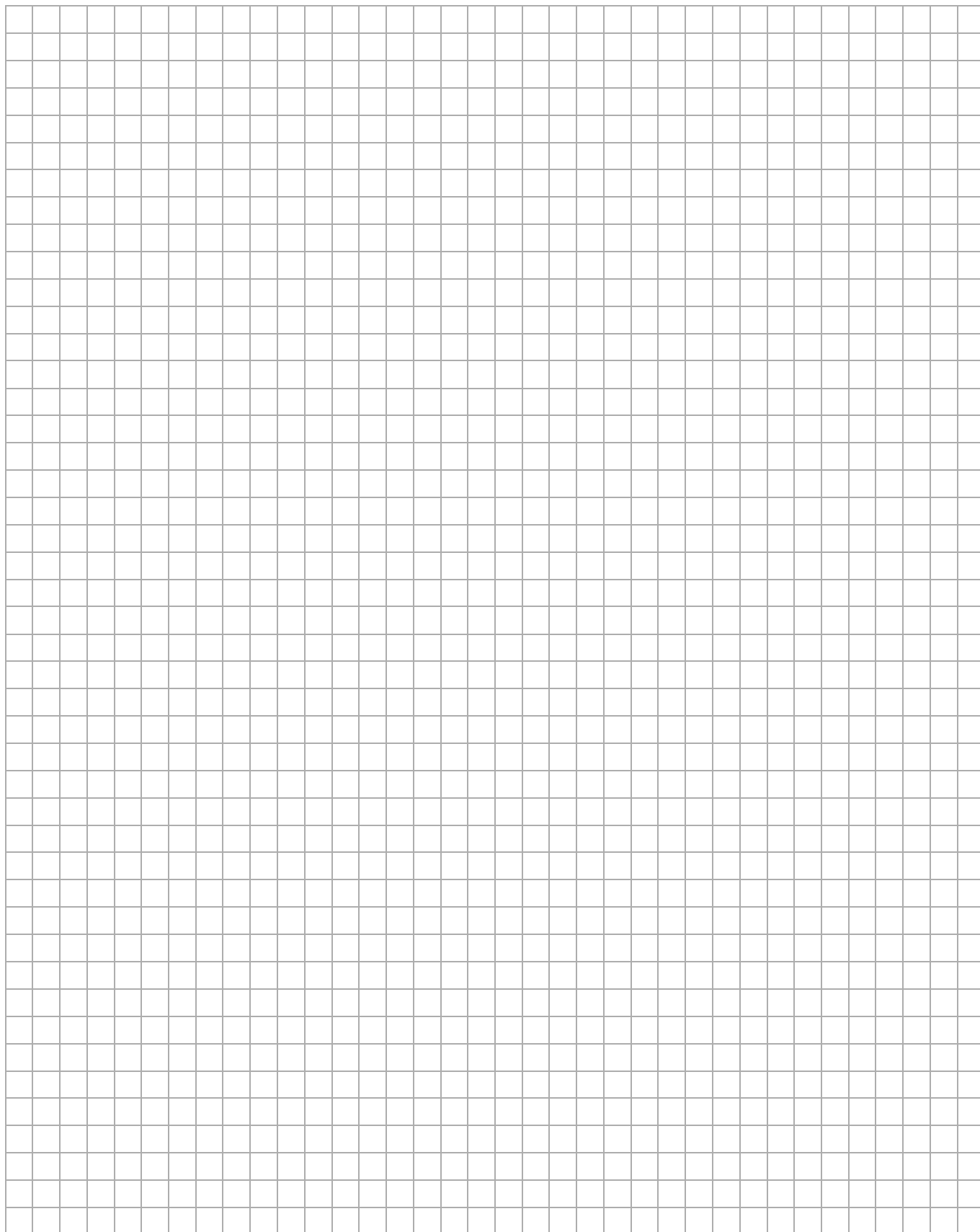


Zadanie 5. (0-3)

Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Na bokach AB i BC wybrano takie punkty D i E , że

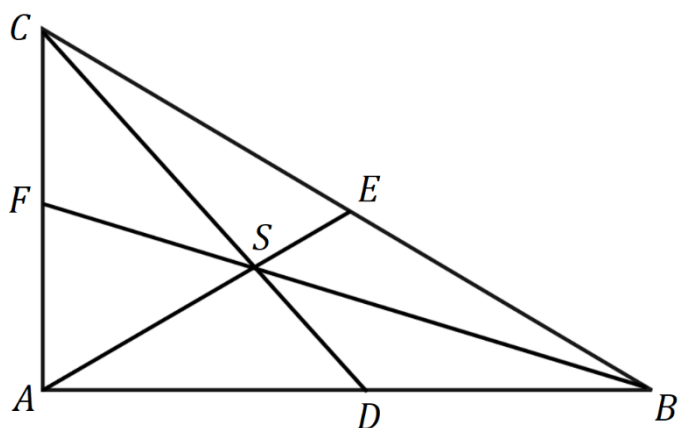
$$|AD| = |CE| = \frac{2}{5}|BC|. \text{ Odcinki } AE \text{ i } CD \text{ przecinają się w punkcie } S.$$

Wykaż, że pole czworokąta $BDSE$ to $\frac{9}{20}$ pola trójkąta ABC .

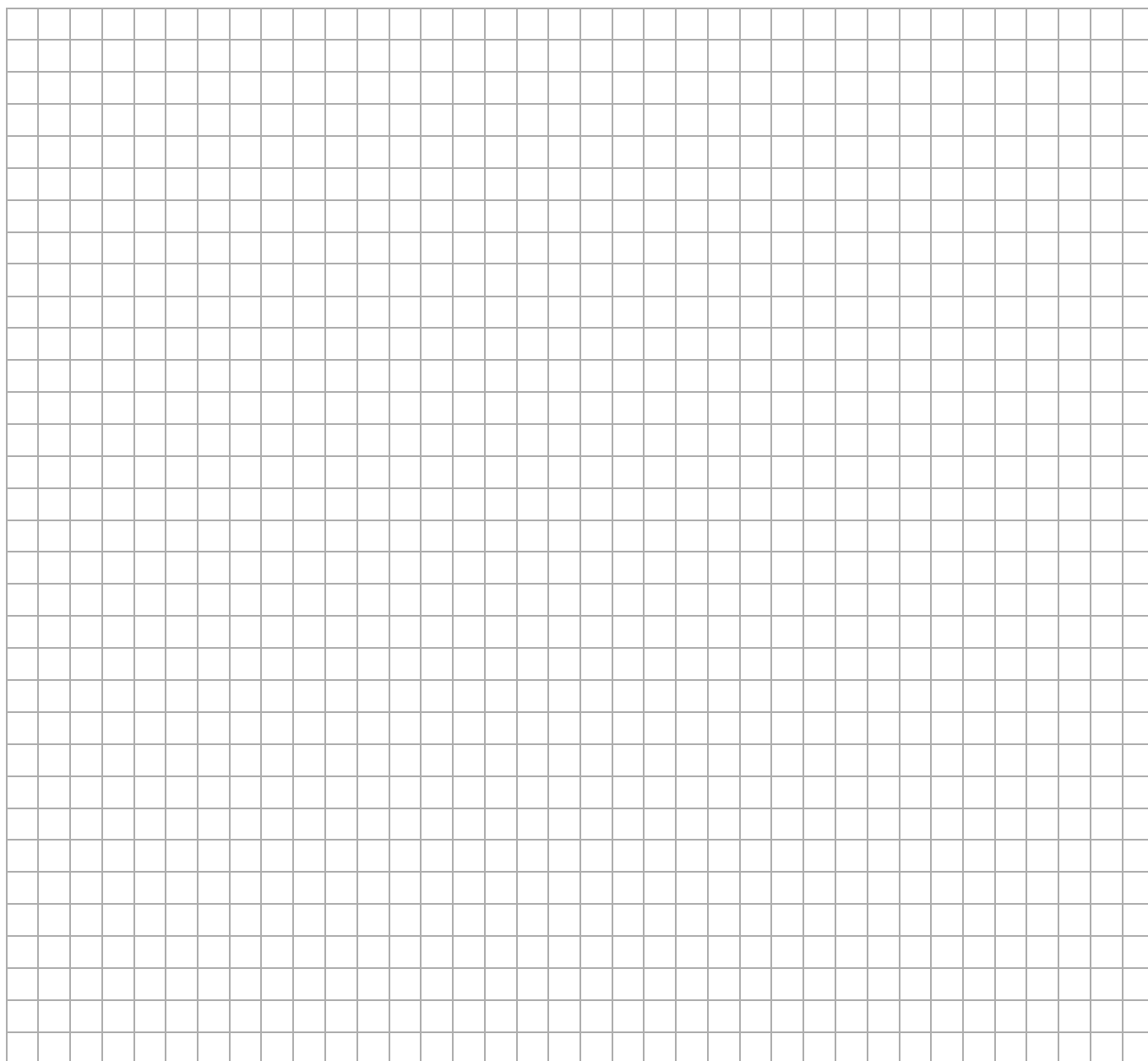


Zadanie 6. (0-4)

W trójkącie prostokątnym ABC gdzie kąt przy wierzchołku A jest prosty, poprowadzono środkowe, które przecięły się w punkcie S , a punkt D jest środkiem boku AB . (zobacz rysunek)



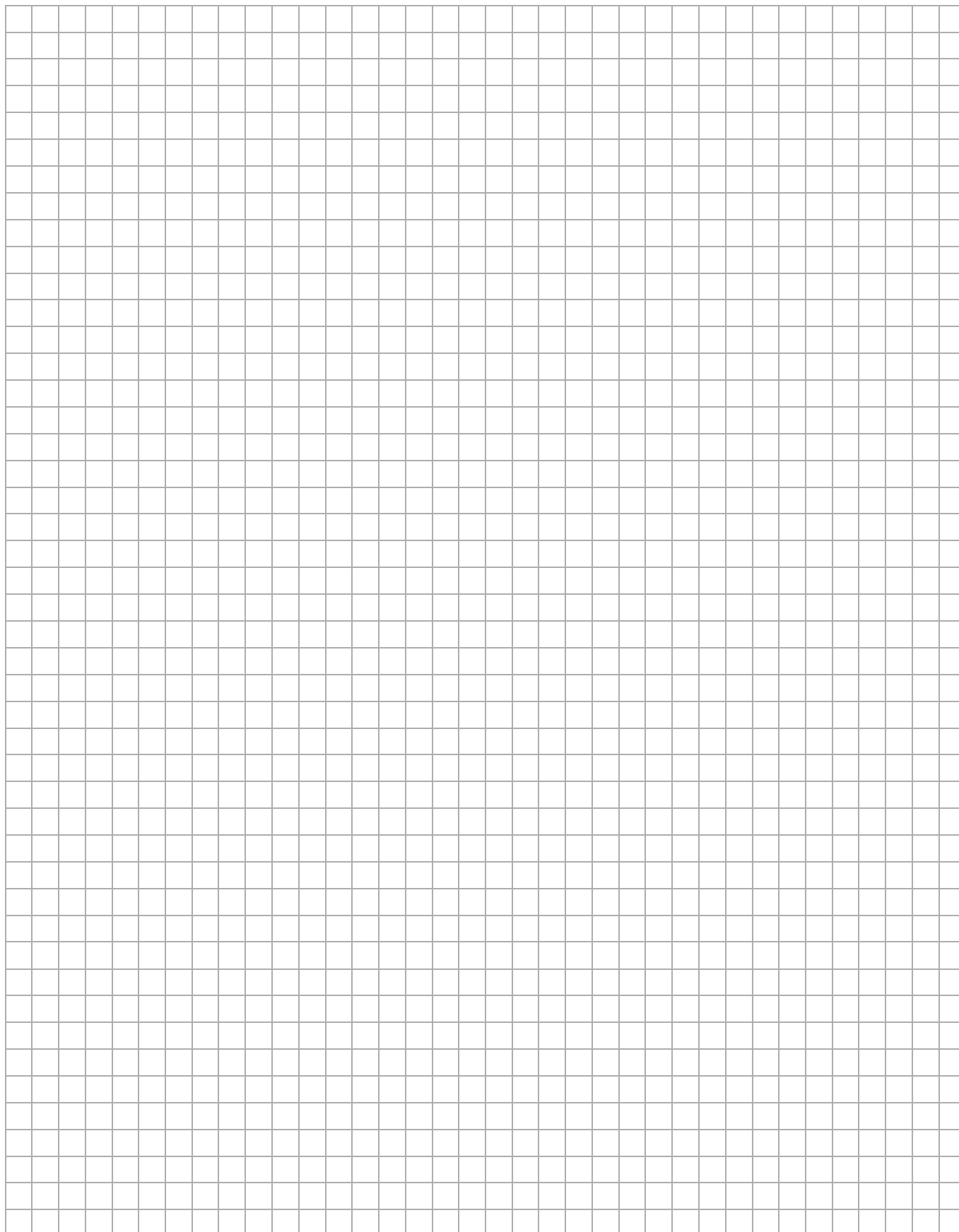
Oblicz $\frac{\sin \angle BCD}{\sin \angle ACD}$, wiedząc, że pole trójkąta ADS jest o 20 mniejsze niż pole trójkąta BCS , wysokość trójkąta ASC poprowadzona z wierzchołka S ma długość 5, a bok AB ma długość 15.



Zadanie 7. (0-4)

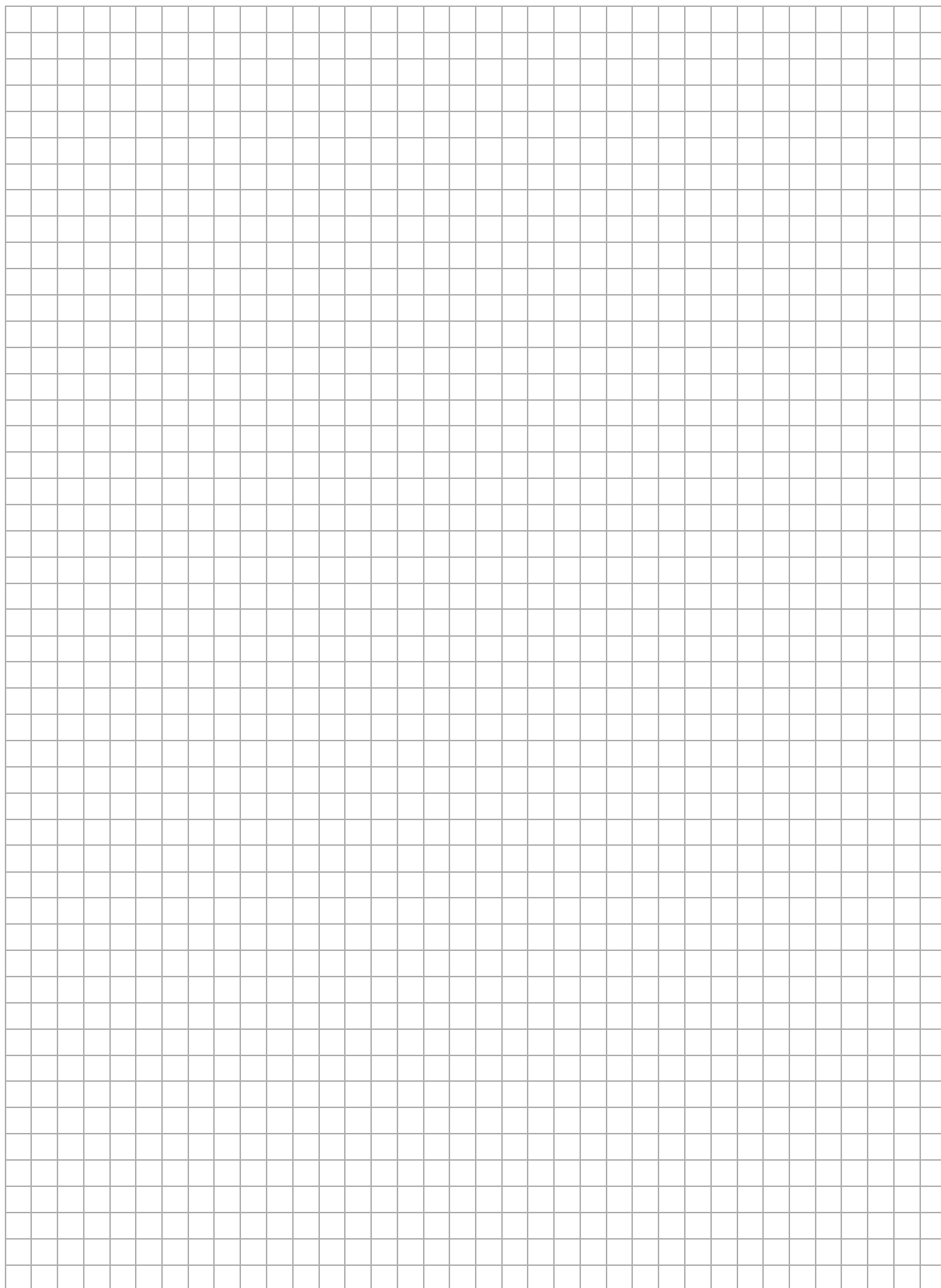
Rozwiąż równanie $\sin 2x + \cos(2x + \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $[-\pi; \pi]$.

Zapisz obliczenia.



Zadanie 8. (0-5)

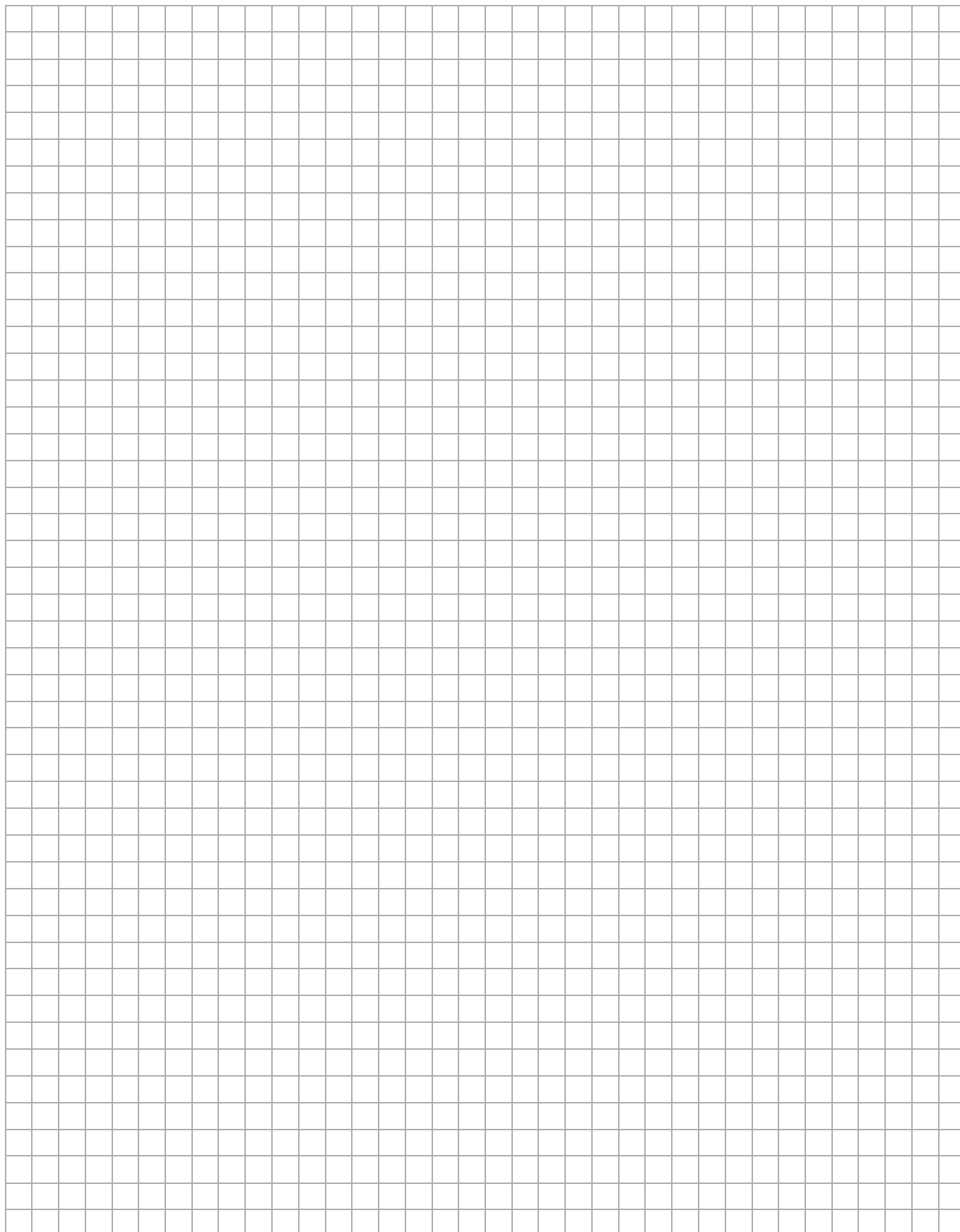
Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = x^2 + 2(m - 2)x + m^2 - 1$ ma dwa miejsca zerowe tych samych znaków, które są jednocześnie mniejsze od 4.



Zadanie 9. (0-4)

Trzy kolejne liczby tworzą dodatni ciąg geometryczny, a suma ich kwadratów wynosi 189. Gdy od pierwszej liczby zabierzemy 4, drugą pozostawimy bez zmian, a do trzeciej dodamy 1 to dostaniemy 3 kolejne liczby ciągu arytmetycznego.

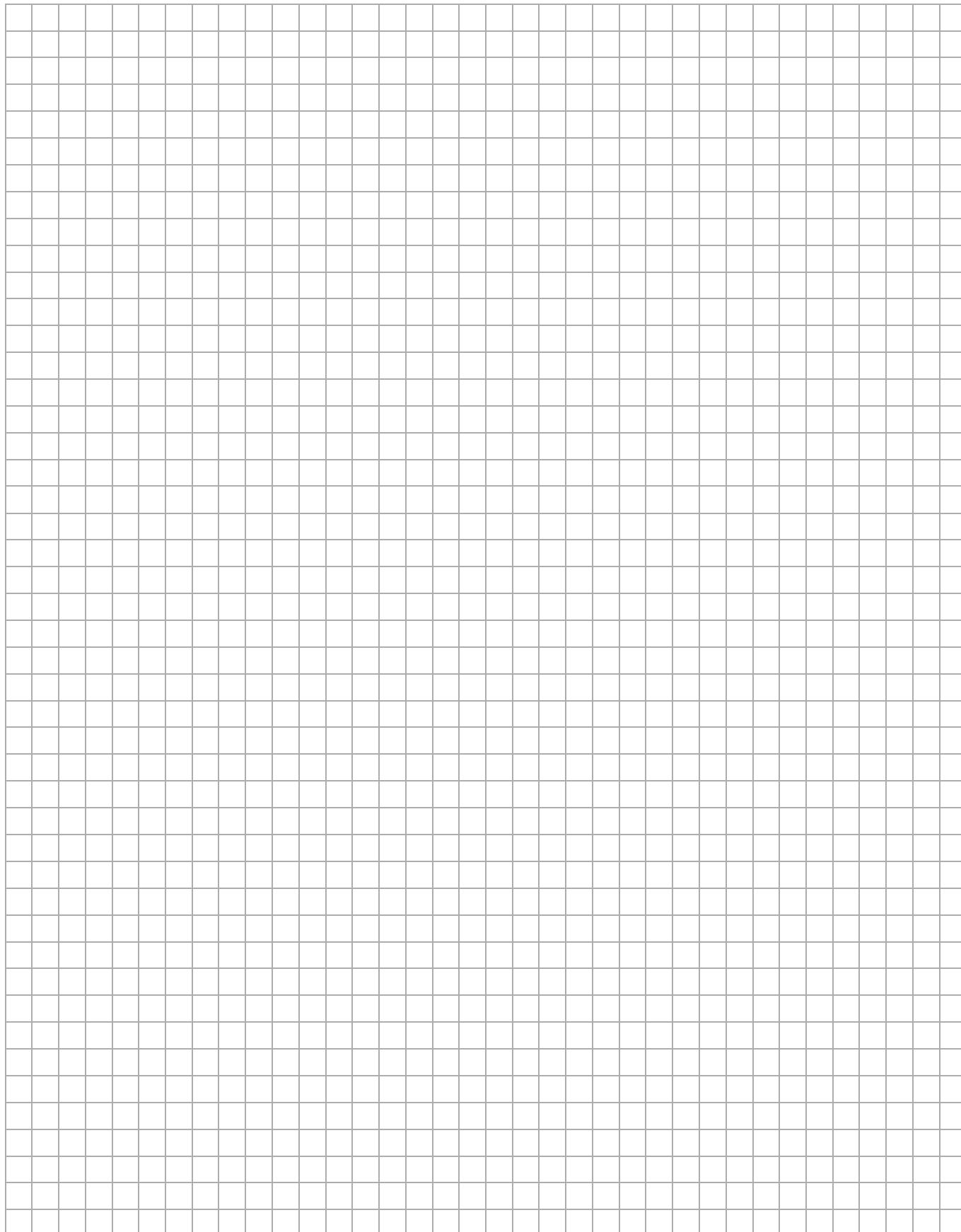
Wyznacz trzy kolejne liczby początkowego ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares, intended for the student to write their calculations.

Zadanie 10. (0-3)

Kasia i n innych osób z jej klasy wybrało się do kina. Grupa zajęła miejsca w jednym rzędzie.

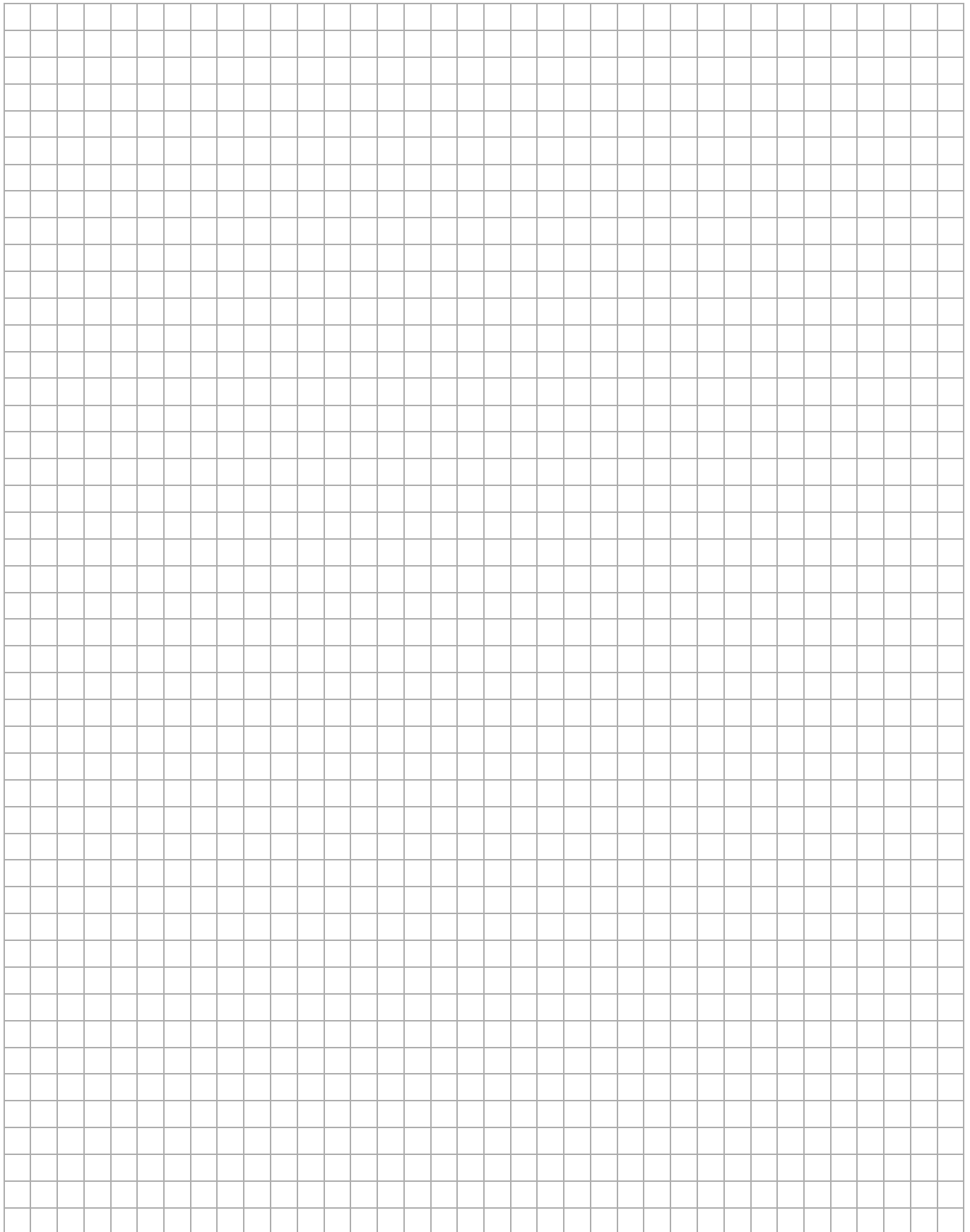
Oblicz, ile osób poszło do kina jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo, że Kasia i jej dwie ulubione koleżanki siedzą obok siebie wynosi $\frac{3}{28}$.

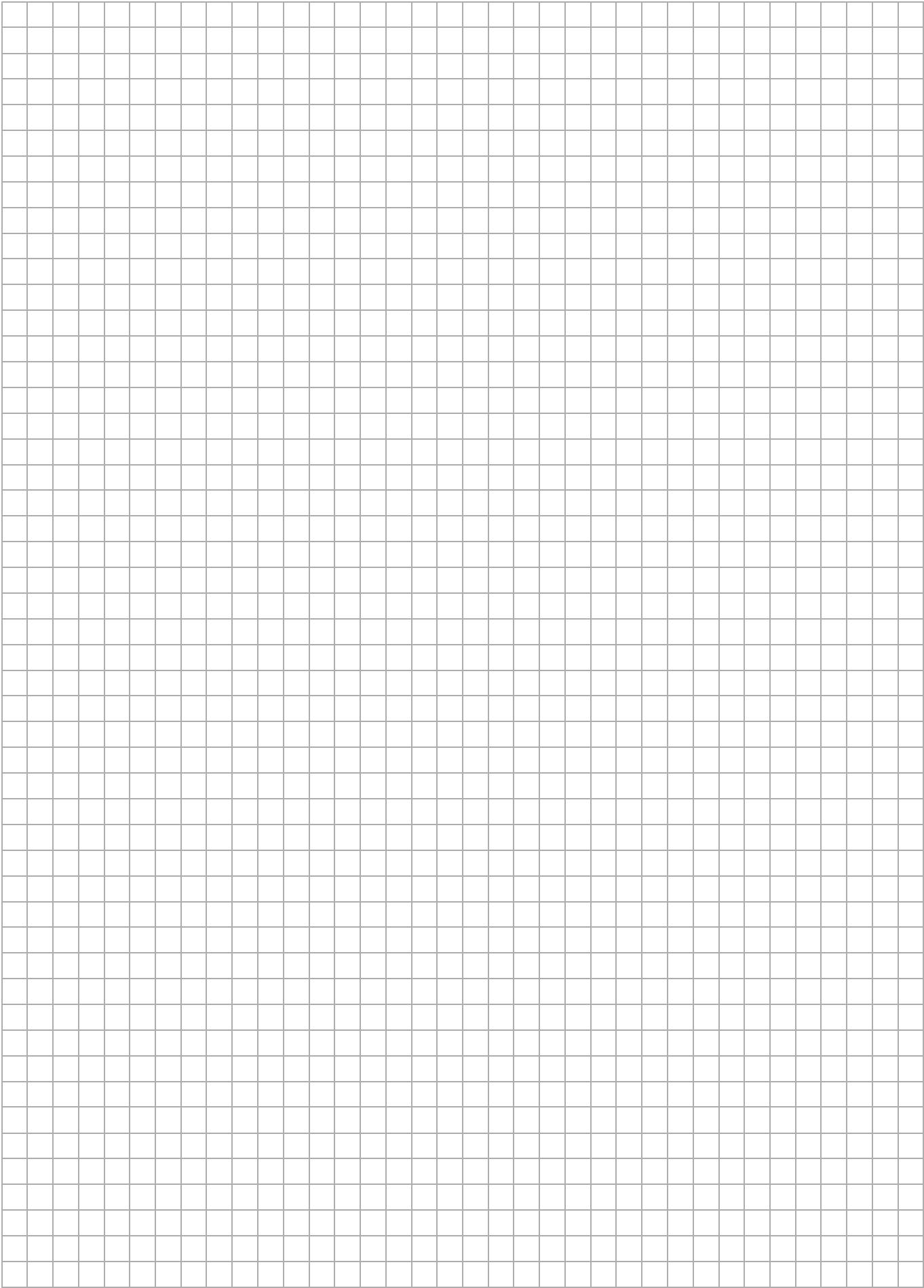


Zadanie 11. (0-6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest okrąg o środku w punkcie $S = (12, -4)$ i promieniu 5.

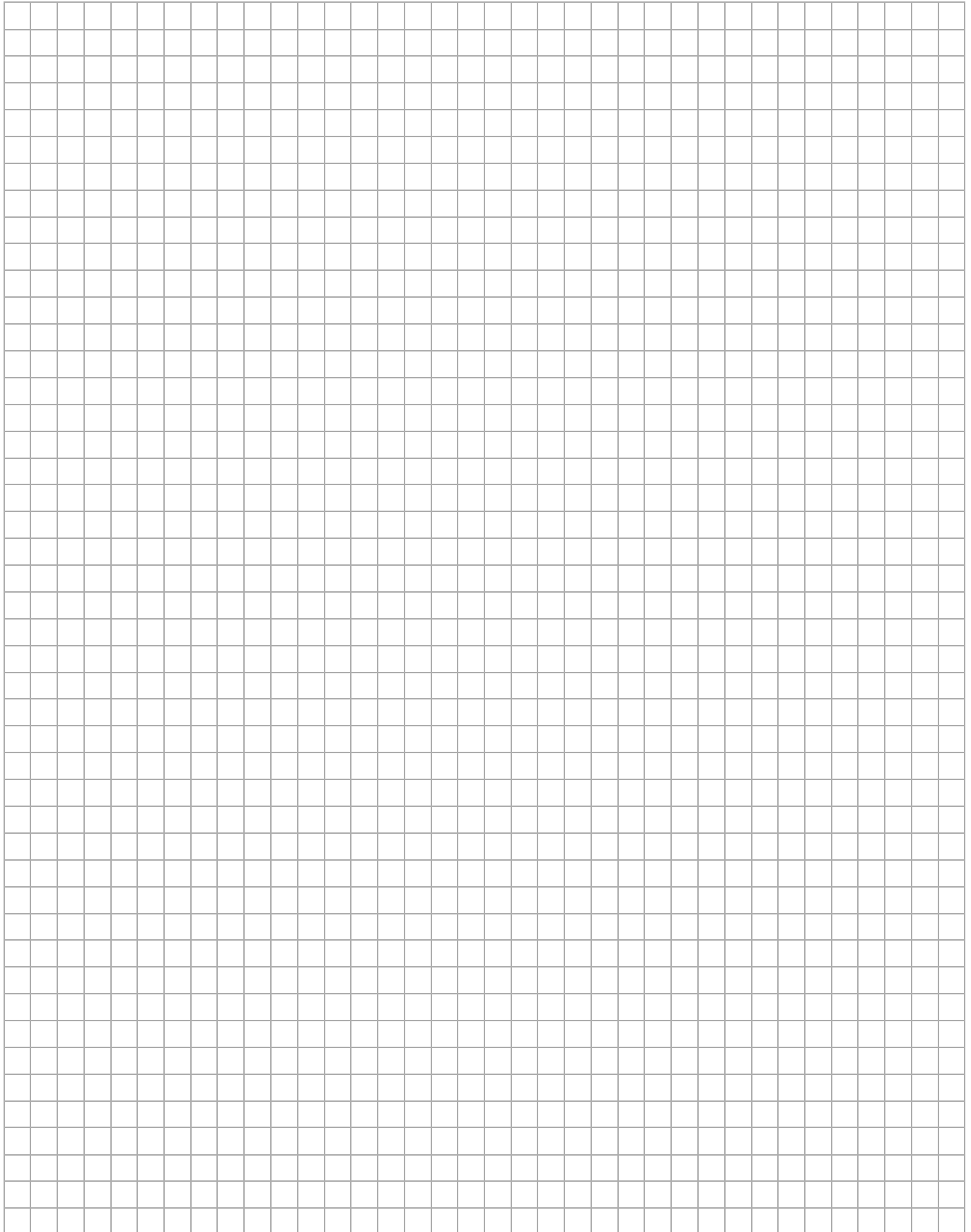
Oblicz pole trójkąta, którego dwa wierzchołki są punktami przecięcia okręgu i prostej $x + 2y + 1 = 0$, a trzeci wierzchołek jest punktem przecięcia stycznych do okręgu w punktach wspólnych okręgu i osi oX .





Zadanie 12. (0-4)

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekątna ściany bocznej tworzy z sąsiednią ścianą boczną kąt α taki, że $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz objętość graniastosłupa wiedząc, że promień okręgu opisanego na podstawie ma $4\sqrt{3}$.



Zadanie 13.

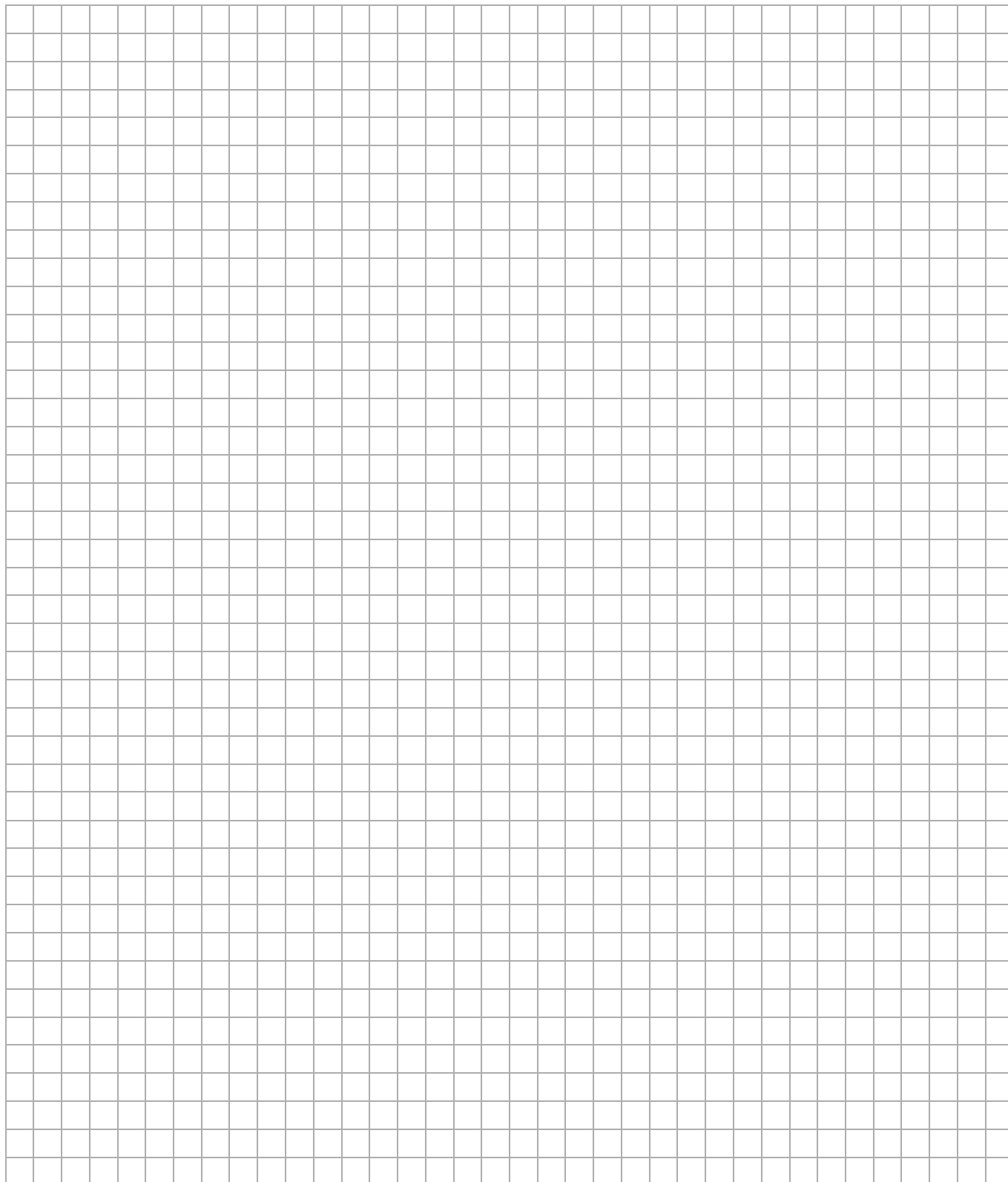
Rozważamy ostrosłupy prawidłowe trójkątne o krawędzi bocznej długości 8.

Zadanie 13.1. (0-2)

Wykaż, że objętość V graniastosłupa w zależności od długości x krawędzi podstawy

graniastosłupa jest określona wzorem $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{64x^4 - \frac{1}{3}x^6}$ oraz wyznacz dziedzinę funkcji

objętości V graniastosłupa. Zapisz obliczenia



Zadanie 13.2. (0-4)

Objętość V graniastosłupa w zależności od długości x podstawy graniastosłupa jest określona wzorem:

$$V(x) = \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{64x^4 - \frac{1}{3}x^6} \quad \text{dla } x \in (0, 8\sqrt{3})$$

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tą największą objętość. Zapisz obliczenia

